

Varianta 043

SUBIECTUL I

- a) $1 - 2i$
- b) 1
- c) $m = 1$.
- d) $a = -1; b = 0$.
- e) 4
- f) $\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) 2
- b) 780.
- c) 1.
- d) 2.
- e) $S = \{-1\}$
- 2.
- a) $g'(x) = 3x^2 - 3$.
- b) $A(-1, 2)$ punct de maxim local, iar $B(1, -2)$ punct de minim local.
- c) $b > a$.
- d) 3.
- e) $-\frac{5}{4}$.

SUBIECTUL III

- a) $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16$.
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$
- c) $f(A) = A^2 - 10A + 16I_2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$
- d) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$. Sistemul este compatibil unic determinat. Rezolvăm sistemul cu regula lui Cramer.

$$S = \{(1, -1)\}$$

- e) $f(2^t) = 0$ este echivalentă cu $2^{2t} - 10 \cdot 2^t + 16 = 0$.

Notăm $2^t = y \in (0, \infty)$. Obținem $y^2 - 10y + 16 = 0$, cu soluțiile $y_1 = 2, y_2 = 8$.

Atunci $2^t = 2$, rezulta $t=1$, iar din $2^t = 8$ obținem $t=3$.

f) Din $f(x) - k \geq 0$, avem $x^2 - 10x + 16 - k \geq 0$.

$$\Delta = 100 - 4(16 - k) = 100 - 64 + 4k = 36 + 4k.$$

Dar $\Delta \leq 0$, adică $k \in (-\infty, -9]$.

Cum $k \in \mathbf{Z}$, atunci cel mai mare k este -9 .

g) Din teorema împărțirii cu rest pentru polinoame avem $X^n = (X^2 - 10X + 16)C + aX + b$

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \text{ are rădăcinile } x_1 = 2 \text{ și } x_2 = 8.$$

Pentru $x = 2$ obținem $2^n = 2a + b$ iar pentru $x = 8$ obținem $8^n = 8a + b$.

$$\text{Atunci } a = \frac{8^n - 2^n}{6}, b = \frac{4 \cdot 2^n - 8^n}{3}.$$

$$\text{Deci restul este } R = \frac{8^n - 2^n}{6}X + \frac{4 \cdot 2^n - 8^n}{3}.$$

SUBIECTUL IV

a) $f(x) = 0$ este echivalentă cu $\frac{\ln x}{x} = 0$, deci $\ln x = 0$, adică $x = 1 \in (0, \infty)$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Deci, $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

d) Din $f'(x) = 0$, obținem $1 - \ln x = 0$, adică $x = e$.

x	0		e		∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			max		

Deci f este strict crescătoare pe intervalul $(0, e]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[e, \infty)$.

e) $x_0 = e$ este punct de maxim local, deci $f(x) \leq f(e)$, $\forall x \in (0, \infty)$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e}, \text{ adică } e \cdot \ln x \leq x, \forall x \in (0, \infty).$$

$$\textbf{f)} \text{ Fie } I = \int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x \cdot (\ln x)' dx = \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_{\frac{1}{e}}^e = 0.$$

g) f este strict descrescătoare pe intervalul $[e, \infty)$, atunci $\forall x > e$ avem $f(x) < f(e)$.

Atunci $f(e) > f(2006) > f(2007)$ sau

$$\frac{\ln 2006}{2006} > \frac{\ln 2007}{2007}, \text{ adică } \ln 2006^{2007} > \ln 2007^{2006} \text{ sau } 2006^{2007} > 2007^{2006}.$$